BEBERAPA PRINSIP-PRINSIP LOGIKA

SMTS 1101 / 3SKS

LOGIKA MATEMATIKA

Disusun Oleh :

Dra. Noeryanti, M.Si

DAFTAR ISI

BEBERAPA PRINSIP-PRINSIP LOGIKA

3.1. Pengantar.

Setelah mempelajari konjungsi, disjungsi, implikasi dan bi implikasi dalam modul proposisi, mahasiswa diharapkan dapat menggunakan konsep –konsep tersebut dalam membuat suatu kesimpulan yang benar pada prinsip-prinsip logika matematika yang valid.

3.2. Kompetensi

Setelah mengikuti pokok bahasan ini mahasiswa diharapkan:

a. Mampu menggunakan konsep-konsep penalaran secara matematis, dalam membuat suatu kesimpulan yang logis.
b. Terampil dalam menggunakan prinsip-prinsip logika secara benar, seperti prinsip modus ponen, modus tollens, silogisma, bukti tidak langsung dan induksi matematik.
c. Terampil dalam melakukan hitungan-hitungan pada konsep kombinasi dan permutasi
d. Terampil dalam menyelesaikan soal-soal latihan

3.3. Uraian Materi

Materi modul ini memberikan gambaran adanya beberapa prinsip-prinsip logika matematika yang benar, sebagai dasar dalam membuat kesimpulan yang valid dari suatu pernyataan majemuk atau ganda.

Setiap pernyataan-peryataan yang digunakan dalam menarik kesimpulan (Konklusi) disebut “premis”. Misalnya : aksioma-aksioma, hipotesa, definisi, rumus-rumus dan pernyataan yang telah dibuktikan sebelumnya.

Definisi: [argumen]

Misalkan $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$ proposisi-proposisi yang selalu bernilai benar (disebut premis). Maka yang disebut ***Argumen*** adalah suatu proposisi yang berbentuk $[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge .... \wedge H_n] \rightarrow K$ merupakan tautologi , dan K adalah suatu kesimpulan.

Jadi dapat pula dikatakan bahwa argumen adalah kumpulan kalimat yang terdiri atas satu atau lebih premis yang memuat bukti-bukti (*evidence*) dan suatu (hanya satu) konklusi.

Konklusi (kesimpulan) selayaknya (suppossed to) diturunkan dari premis-premis atau premis-premis selayaknya mengimplikasikan konklusi. dalam argumentasi yang valid konklusi akan bernilai benar jika setiap premis yang digunakan di dalam argumen juga bernilai benar. Jadi validitas argumen tergantung pada bentuk argumen itu dan dengan bantuan tabel nilai kebenaran.

Selanjutnya akan dibahas beberapa prinsip-prinsip logika yang valid antara lain prinsip modus ponens, prinsip modus tollens, prinsip silogisma (hukum transitif), silogisma disjungtif, reductio ad absordum (Bukti tak langsung), induksi matematika (Induksi Lengkap), dan konsep permutasi dan kombinasi

3.3.1. Prinsip Modus Ponnens

Prinsip dasar :

Premis 1 :	$p \rightarrow q$	(benar)
Premis 2 :	p	(benar)
Konklusi :	q	(benar)

&

Artinya : Jika pernyataan "$p \rightarrow q$" bernilai benar dan "p" bernilai benar maka dapat disimpulkan bahwa q pasti bernilai benar, dituliskan sebagai $\{(p \rightarrow q) \wedge p\} \rightarrow q$ merupakan suatu tautologi. Dengan tabel nilai kebenaran berikut ini:

Tabel 3.1.Prinsip Modus Ponnens

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$\{(p \to q) \wedge p\} \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

ß

Tautologi

Catatan: prinsip modus ponnens selalu bernilai benar (kolom terakhir)

Contoh (3.1): Premis 1 : Jika saya belajar maka saya lulus ujian

Premis 2 : Saya belajar

———————————————————— &

Kesimpulan : Saya Lulus Ujian

dengan P = saya belajar dan q = saya lulus ujian

3.3.2. Prinsip Modus Tollens

Prinsip dasar :

Premis 1 : $p \to q$ (benar)

Premis 2 : $\overline{q}$ (benar) ……… **(1)**

———————————————————— &

Konklusi : $\overline{p}$ (benar)

Artinya : Jika pernyataan ($p \to q$) bernilai benar dan $\overline{q}$ bernilai benar maka dapat disimpulkan $\overline{p}$ pasti bernilia benar. Dinyatakan sebagai $(p \to q \wedge \overline{q}) \to \overline{p}$ merupakan tautologi (Kolom terakhir dari tabel nilai kebenaran tabel 3.2)

Tabel 3.2. Prinsip Modus Tollens

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}$	$(p \rightarrow q \wedge \bar{q}) \rightarrow \bar{p}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

ß

Tautologi

Contoh (3.2): kembali ke contoh (3.1)

dengan P = saya belajar dan q = saya lulus ujian

Premis 1 : Jika saya belajar maka saya lulus ujian

Premis 2 : saya tidak lulus ujian .... **(2)**

________________________________ &

Kesimpulan : Saya tidak belajar

Dalam bentuk lain: karena implikasi $p \rightarrow q$ ekivalen dengan kontraposisinya yaitu $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$, maka diperoleh :

Premis 1 : $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ (benar)

Premis 2 : $\bar{q}$ (benar)

________________________________ & .... **(3)**

Konklusi : $\bar{p}$ (benar)

Bentuk ini tidak lain adalah prinsip Modus Ponnens

Artinya : Jika pernyataan $\bar{q}$ ® $\bar{p}$ bernilai benar dan $\bar{q}$ bernilai benar maka dapat disimpulkan $\bar{p}$ pasti bernilia benar. Dinyatakan sebagai ($\bar{q}$ ® $\bar{p}$) & $\bar{q}$ } ® $\bar{p}$ merupakan tautologi (Kolom terakhir dari tabel 3.3)

Tabel 3.3. Prinsip Modus Ponnens

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$ ® $\bar{p}$	($\bar{q}$ ® $\bar{p}$) & $\bar{q}$	($\bar{q}$ ® $\bar{p}$) & $\bar{q}$ } ® $\bar{p}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

ß

Tautologi

Contoh (3.3): kembali ke contoh (3.2)

dengan P = saya belajar dan q = saya lulus ujian

Premis 1 : Jika saya tidak lulus ujian maka saya tidak belajar

Premis 2 : Saya tidak lulus ujian **………(4)**

———————————————————— &

Kesimpulannya : Saya tidak belajar

3.3.3. Prinsip Silogisma (hukum transitif)

Prinsip dasar:

Premis 1 : $p \to q$ (benar)

Premis 2 : $q \to r$ (benar)

———————————————————— &

Konklusi : $p \to r$ (benar)

Artinya : Jika pernyataan ($p \to q$) bernila benar dan ($q \to r$) bernilai benar maka dapat disimpulkan bahwa kalimat ($p \to r$) bernilai benar. Dinyatakan sebagai **(** *p* ® *q* **)** $\wedge$ **(** *q* ® *r* **)** ® **(** *p* ® *r* **)** merupakan tautologi (tabel 3.4)

Tabel 3.4 Prinsip Silogisma (hukum transitif)

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

ß

Tautologi

Catatan : Hukum transitif dapat digunakan untuk membuktikan kalimat-kalimat lebih dari 2 ekuivalen seperti : $p \to q \to r \to s \to t$

Caranya: Dibuktikan rangkaian implikasi tertutupnya, sbb $p \to q \to r \to s \to t \to p$

Contoh (3.4) : Premis 1 : Jika kamu benar maka saya bersalah

Premis 2 : Jika saya bersalah saya minta maaf

──────────────────────── &

Konklusi : Jika kamu benar, saya minta maaf

3.3.4. Silogisma Disjungtif

Prinsip dasar : Premis 1 : $p \vee q$ (benar)

Premis 2 : $\bar{q}$ (benar)

──────────────────────── &

Konklusi : p (benar)

Artinya : Jika pernyataan ($p \vee q$) bernilai benar dan $\overline{q}$ bernilai benar, maka dapat disimpulkan kalimat *p* pasti bernilai benar. Dinyatakan $[(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \overline{q}] \rightarrow \boldsymbol{p}$ sebagai tautologi. Dengan tabel nilai kebenaran sebagai berikut **:**

Tabel 3.5. Prinsip Silogisma Disjungtif

p	q	$\overline{q}$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \overline{q}$	$[(p \vee q) \wedge \overline{q}] \rightarrow p$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1

$\Downarrow$

Tautologi

Contoh(3.5) :

Premis 1 : Pengalaman ini berbahaya atau membosankan

Premis 2 : Pengalaman ini tidak membosankan

——————————————————————— &

Konklusi : Pengalaman ini berbahaya

Dengan p = pengalaman berbahaya , q = pengalaman membosankan

3.3.5. Prinsip Reductio Ad Absurdum (bukti tidak langsung)

Kegunaan prinsip reductio ad absurdum (bukti kemustahilan) adalah untuk membuktikan bahwa suatu proposisi benar, secara tidak langsung.

Bukti ini adalah salah satu bentuk pembuktian yang digunakan untuk bentuk-bentuk pernyataan bersyarat seperti Implikasi atau bi-Implikasi.

Misalnya akan dibuktikan benarnya pernyataan $p \rightarrow q$ .Untuk membuktikan dengan melakukan prosedur sebagai berikut :

Pernyataan **“ p $\rightarrow$ q”** dibaca diketahui <u>pernyataan **p**</u> akan dibuktikan <u>pernyataan **q**</u>

Prosedur yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Diketahui pernyataan **p** (pernyataan yang selalu benar)
2. Proposisi yang akan dibuktikan adalah pernyataan **q**
3. Dengan mengandaikan pernyataan **q** tidak benar, yaitu $\overline{q}$ benar.
4. Lakukan analisis dengan menurunkan pernyataan $\overline{q}$, sehingga diperoleh suatu kontradiksi, yaitu adanya pernyataan $p \wedge \overline{p}$ (mustahil, tidak mungkin terjadi karena $p \wedge \overline{p}$ bernilai salah)
5. Adanya kontradiksi, sehingga mengakibatkan pengandaian harus diingkar, yaitu pernyataan **q** adalah benar.
6. Menurut kaidah *reductio ad absurdum* terbukti bahwa pernyataan **“ p ® q”** benar.

Contoh(3.6) *:* Buktikan pernyataan (a^2 = genap) $\rightarrow$ (a = genap)

[bentuk implikasi, dengan pernyataan p = (a^2 = genap) , dan pernyataan q = (a = genap)]

Bukti : (Menggunakan reductio ad absurdum)

Andaikan $a \neq$ genap, berarti a = ganjil.

Menurut definisi bilangan ganjil, $a = 2k + 1$, dimana k = bilangan bulat.

Diperoleh :

$$a^2 = (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= \quad 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\text{bilangan bulat}} + 1 \; = \; \text{bilangan ganjil}$$

Jadi a^2 = bilangan ganjil ………..…………………..……………..(1)

Padahal diketahui a^2 = bilangan genap ………………………… …. (2)

Timbul kontradiksi yaitu a^2 = bilangan ganjil dan a^2 = bilangan genap

Sehingga pengandaian harus diingkar. Yaitu: *a* = bilangan genap.

Jadi terbukti : a^2 = genap $\rightarrow$ *a* = genap.

3.3.6. Prinsip Induksi Matematika (Induksi Lengkap)

Prinsip induksi matematika digunakan untuk membuktikan suatu teorema / rumus / sifat yang bernilai benar.

Langkah pembuktian :

1. Basis induksi

   Tunjukkan P(1) benar. [pernyataan benar untuk n=1]

2. Hipotesis induksi

   Anggapan P(k) benar untuk k [pernyataan benar untuk n=k]

3. Langkah induksi

   Tunjukkan P(k+1) benar. [ditunjukan pernyataan benar untuk n=(k+1)]

Anggapan bahwa anteseden benar ini disebut *hipotesis induksi*.
Jika hipotesis induksi benar, maka ditunjukan konsekuennya benar.

Catatan : Bukti induksi matematika ini hanya digunakan untuk membuktikan suatu teorema/rumus/sifat yang selalu berlaku untuk semua *n*.

Contoh (3.7): Tunjukan bahwa jumlah suku ke-n dalam deret ukur adalah

$$D_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

Penyelesaian: (menggunakan induksi)

Bentuk deret ukur: a , ar , ar^2 , …… , ar^{n-1} , ……

Dimana : i). Suku ke-*n*, $S_n = ar^{n-1}$

ii). Jumlah *n*-buah suku pertama $D_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

Langkah pembuktian :

1. Basis induksi

   Ditunjukkan pernyataan benar untuk n=1

   Untuk n = 1, maka $D_1 = \dfrac{a(1-r)}{1-r} = a$ (benar)

2. Hipotesis induksi

   Anggapan pernyataan benar untuk n=p

   Artinya untuk n = p, diperoleh $D_p = S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_p = \dfrac{a(1-r^p)}{1-r}$

3. Langkah induksi

   Ditnjukkan pernyataan benar untuk n=(p+1)

$$\begin{aligned}
D_{p+1} &= S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_p + S_{p+1} \\
&= \underbrace{S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_p}_{D_p} + S_{p+1} \\
&= \underbrace{D_p}_{\frac{a(1-r^p)}{1-r}} + S_{p+1} \\
&= \frac{a(1-r^p)}{1-r} + ar^p
\end{aligned}$$

$$= a\left[\frac{1-r^{p}}{1-r}+\frac{(1-r)r^{p}}{(1-r)}\right] = a\left[\frac{1-r^{p}+r^{p}-r^{p+1}}{1-r}\right]$$

$$= a\left(\frac{1-r^{p+1}}{1-r}\right)$$

Jadi terbukti $D_{p+1} = a\left(\frac{1-r^{p+1}}{1-r}\right)$ adalah benar.

3.3.7. Prinsip Analisis Kombinatorik

Dalam banyak hal, himpunan semesta ***S*** yang kita kaji merupakan himpunan hingga dan beranggota tidak begitu banyak. Dengan demikian kita dapat dengan mudah menghiung jumlah anggotanya dengan menuliskan S menurut cara pencacahan.

Contoh (3.8):

Sebuah kotak berisi 5 buah bola yang diberi nomor 1 sampai dengan 5. Kemudian dari kotak tersebut kita ambil 2 buah bola secara acak, satu persatu. Hitung banyaknya urutan angka yang mungkin bisa kita lakukan jika

a. pengambilan bola dilakukan dengan pengembalian (yang artinya bola yang terambil pertama dikembalikan dulu ke dalam kotak sebelum dilakukan pengambilan kedua.

b. pengambilan bola dilakukan tanpa pengembalian.

Jawab:

a. Misal ***A*** adalah himpunan nomor bola = {1, 2, 3, 4, 5}

Karena pengambilan bola dilakukan dengan pengembalian, maka bola pertama memiliki kemungkinan untuk terambil lagi pada pengambilan kedua. Dengan demikian urutan angka nomor bola yang mungkin terambil adalah

$$S = \begin{Bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{Bmatrix}, \quad \text{Jadi } n(S) = 25$$

Dengan ij menunjukan pengambilan pertama i dan kedua j. Misalnya: 23 menunjukan pengambilan pertama 2 dan kedua 3. Jadi banyaknya urutan angka yang mungkin adalah $n(S) = 25$

b. Karena pengambilan bola dilakukan tanpa pengembalian, maka bola yang terambil pertama tidak mungkin terambil yang kedua. Jadi semua urutan angka nomor bola adalah:

$$S = \begin{Bmatrix} 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 45 \end{Bmatrix}; \text{ disini } \{11, 22, 33, 44, 55\} \text{ tidak mungkin muncul.}$$

Dengan demikian banyaknya urutan angka yang mungkin terambil adalah $n(S) = 20$

Selanjutnya perhatikan contoh berikut ini:

Misalnya kita memiliki 15 buah buku yang kita beri angka 1 sampai 15. Kemudian kita memilih secara acak 5 buah buku yang kemudian kita susun berjajar dari kiri kekanan di dalam rak buku. Ada berapa banyak susunan yang mungkin?. Anda boleh mencoba mencacah semua susunan yang mungkin. Hitung ada berapa banyak.

Pada contoh tersebut, tidak menguntungkan jika kita menghitung jumlah anggota dengan mencacah dahulu semua anggotanya. Disinilah peran konsep analisis kombinatorik, yaitu mengitung jumlah aggota himpunan tanpa mencacah dahulu semua anggotanya.

a. Kaidah Perkalian

Bila suatu operasi dapat dilakukan dalam n_1-cara, dan setiap cara pada operasi ke-2 dapat dilakukan dalam n_2-cara, maka kedua operasi tsb secara bersama-sama dapat dilakukan dalam $(n_1)(n_2)$ -cara.

Aturan perkalian ini dapat diperluas sehingga mencangkup banyak operasi.

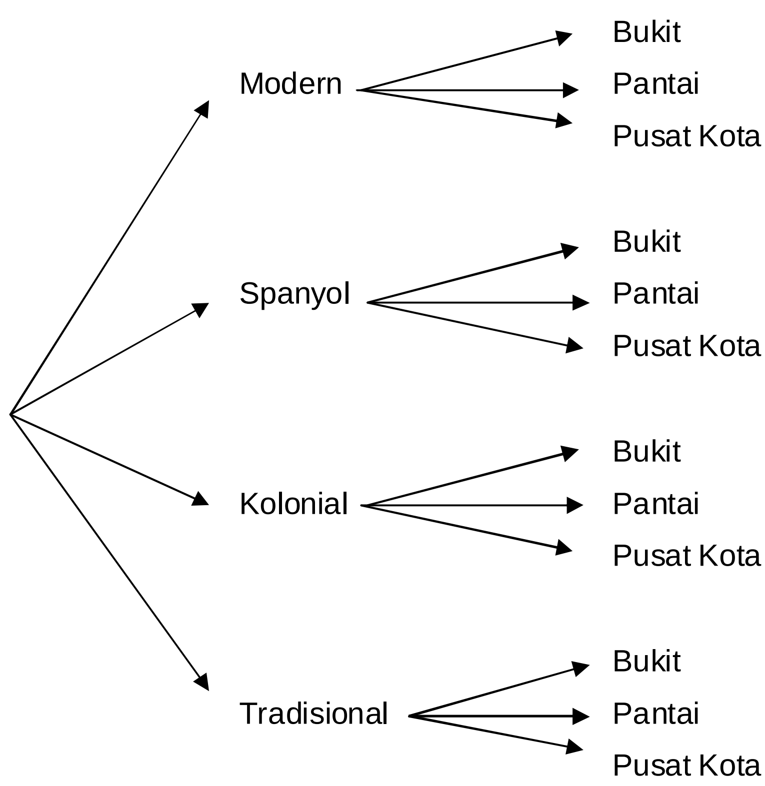
Contoh (3.9):

Suatu perusahaan perumahan menawarkan untuk calon pembeli menyajikan beberapa pilihan rumah gaya luar berbentuk tradisional, spanyol, kolonial dan modern, bertempat di daerah pusat kota, pantai,dan bukit. Ada berapa banyak pilihan seseorang pembeli dapat memesan rumah?

Jawab: $n_1 = 4$; $n_2 = 3$

Jadi banyaknya pilihan untuk memesan rumah = $(n_1)(n_2)$ = (4)(3) = 12 macam

Dapat pula dinyatakan dalam diagram pohon berikut ini:



Contoh(3.10):

Seorang langganan ingin memasang telepon dan ia dapat memilih dari 10 warna dekorasi, 3 pilihan panjang kawat sambungan dan 2 jenis telepon yang diputar atau yang pakai tombol. Ada berapa banyak pilihan jika seseorang akan memasang telepon tersebut di atas?

Jawab: $n_1 = 10$; $n_2 = 3$; $n_3 = 2$

Jadi banyaknya pilihan jika seseorang akan memasang telepon adalah

$(n_1)(n_2)(n_3) = (10)(3)(2) = 60$ macam pilihan

b. Permutasi dan Kombinasi

Definisi (3.1):

Permutasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari satu kumpulan obyek yang diambil sebagian atau seluruhnya

Teorema(3.1):

1. Banyaknya permutasi dari *n*-obyek yang berlainan jika diambil *k* sekaligus adalah ${}_nP_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dimana $k \le n$.
2. Banyaknya permutasi dari *n*-obyek yang berbeda adalah $n!$ (dibaca n-faktorial
3. Banyaknya permutasi n-obyek berlainan yang disusun melingkar adalah $(n-1)!$
4. Banyaknya permutasi dari n-obyek yang berlainan jika n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis ke-2, …….. , n_k berjenis ke-k adalah

$${}_nP_{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Jika *k* dari *n* elemen suatu himpunan disusun menurut urutan tertentu, maka susunan berurut yang diperoleh disebut ***permutasi*** dari n setiap kali diambil *k* elemen, dimana $k \le n$.

Perhatikan bahwa dalam permutasi yang diperhatikan selain elemen-elemennya juga urutannya. Jika urutan berubah, walaupun elemen-elemennya sama, dipandang sebagai permutasi yang berbeda. Jadi (*a , b , c); (c, a, b)* dan (*b, c, a)* adalah permutasi yang berbeda.

Jadi banyaknya permutasi dari n-elemen setiap kali dipilih k-elemen dinyatakan dengan simbol ${}_nP_k$. atau P_k^n atau *P* (*n, k*)

$${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad ; \quad k \le n.$$

Didefinisikan: *o*! = 1

Jika membuat susunan berurut dengan k elemen yang dipilih dari *n* elemen maka terdapat *n* pilihan untuk pilihan untuk elemen-elemen pertama dalam urutan permutasi tersebut sebagai elemen kedua terdapat (*n* – 1) pilihan, sebagai elemen ke tiga terdapat (*n* – 2) pilihan, dan seterusnya sebagai elemen ke-k terdapat (*n* – *k* + 1) pilihan. Jadi banyaknya permutasi seperti di atas adalah *n* (*n* – 1) (*n* – 2) …… (*n* – *k* + 1).

$$= \frac{n(n-1)(n-2).......(n-k+1)(n-k)......2.1}{(n-k)........(2)(1)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Contoh(3.11):

Misalnya untuk n=4 dan k=3 , diperoleh ${}_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

Jika *k* = *n* maka banyaknya permutasi dari *n* elemen setiap kali diambil *n* elemen ini adalah *n*!. Atau, " dari *n* elemen dapat dibuat *n*! urutan yang berbeda "

Misalnya : Dari 3 elemen *a, b* dan *c* dapat dibuat permutasi : ${}_3P_3 = 3! = 6$, yaitu : *(a b c); (a c b);(b a c); (b c a);(c a b);(c b a)*

- Jika permutasi tersebut elemen-elemennya ada elemen yang sama.

Apabila dari n elemen yang terdiri dari : n_1 elemen macam pertama, n_2 elemen macam kedua, n_3 elemen macam ketiga, ………, n_k elemen macam ke-k. Maka banyaknya permutasi yang dapat dibuat dari n elemen ini adalah :

$$ {}_nP_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ldots\ n_k!} ; \quad \text{dimana } n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k . $$

Contoh(3.12):

Ada berapa permutasi yang dapat dibentuk dari himpunan yang mempunyai 3 anggota yang berlainan.

Jawab:

Misalnya himpunan tersebut adalah H = {a, b, c}

Permutasi yang dapat dibuat adalah abc, acb, bac, bca, cab, cba. Ada 6 susunan yang berlainan. atau

Permutasi yang dapat dibuat adalah $3! = (3)(2)(1) = 6$ (susunan yang berlainan)

Contoh(3.13):

Ada berapa banyak permutasi yang dapat dibentuk dari himpunan yang mempunyai 4 anggota.

Jawab:

Misalnya himpunan tersebut adalah K = {a, b, c, d}

Maka banyaknya permutasi dari empat huruf adalah yang dapat dibentuk adalah

$4! = (4)(3)(2)(1) = 24$ susunan yang berbeda

Contoh(3.14):

Berapa banyaknya permutasi yang dapat dibuat dari 4 huruf bila 2 huruf diambil sekaligus

Jawab:

Misalnya himpuan dari a huruf tersebut adalah A = {a, b, c, d}

Jika setiap kali kita ambil 2 huruf, maka urutan yang dapat kita bentuk adalah ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db,cd, dc. Ada 12 susunan

Contoh(3.15):

Berapa banyaknya jadwal yang dapat disusun dalam penyelenggaran pelatihan kerja, untuk 3 penceramah dalam 3 pertemuan bila ke-3nya bersedia memberikan pelatihan setiap hari selama 5-hari kerja?

Jawab:

Dalam hal ini n=5 dan k=3, permutasi yang dapat ibentuk adalah

$$_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = (5)(4)(3) = 60$$

Jadi banyaknya jadwal yang dapat disusun dalam penyelenggaran pelatihan kerja tersebut adalah 60 macam susunan

Contoh(3.16):

Suatu pohon natal dihias dengan 9 bola lampu yang dirangkai seri. Ada berapa banyak cara menyusunya jika 3 diantaranya berwarna merah, 4 kuning, dan 2 biru?

Jawab:

Masalah disini termasuk permutasi dengan n=9, n_1 =3, n_2=4, dan n_3 =2

Banyaknya susunan yang berbeda adalah $= \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$ cara

Jika ingin mengetahui banyaknya cara memilih r-benda dari sejumlah n tanpa mempedulikan urutannya, pemilihan seperti ini disebut **kombinasi.** Suatu kombinasi sesungguhnya merupakan sekatan dengan dus sel, sel pertama berisi r unsur yang dipilih, sedangkan sel lainnya berisi $(n-r)$. Jumlah kombinasi seperti ini dinyatakan dengan $\binom{n}{r,n-r}$ dan disingkat $\binom{n}{r}$ karena jumlah unsure pada sel kedua haruslah $(n-r)$. Perhatikan definisi dan teorema berikut ini

Definisi (3. 2) :

Suatu himpunan bagian yang terdiri dari *k* elemen yang diperoleh dari suatu himpunan dengan *n* elemen disebut suatu ***Kombinasi*** dari *n* elemen setiap kali diambil *k* elemen.

Jumlah kombinasi dari *n* elemen setiap kali diambil *k* elemen diberi simbol ${}_nC_k = C^n_k$, $C(n,k)$ atau $\binom{n}{k}$ dirumuskan sebagai:

$$ {}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} $$

Teorema(3.2):

1. Banyaknya kombinasi dari n-obyek yang berlainan bila diambil sebanyak r-sekaligus adalah $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

2. Banyaknya cara menyekat suatu himpunan dari n-obyek dalam r-sel, masing-masing berisi n_1 unsur dalam sel-pertama, n_2 dalam sel ke-2, … , n_r dalam sel ke-r adalah $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$; dengan $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$

Teorema (3.3):

Andaikan *A* adalah suatu himpunan dengan *n* elemen dimana $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ dengan n_i = bilangan bulat, maka banyaknya partisi yang berbeda dari himpunan A dalam himpunan bagian $A_1, A_2, \ldots, A_k$ masing-masing terdiri atas $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elemen adalah :

$$ \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\cdots\binom{n-n_1-\ldots\ldots n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots\ldots n_k!} $$

Catatan :

Ambil satu kombinasi tertentu. Jika disusun permutasi dari *k* elemen kombinasi tersebut, maka dapat diperoleh *k*! permutasi.

Dengan kata lain,

"Dari satu kombinasi dapat disusun *k*! permutasi" ini berarti bahwa jumlah permutasi yang diperoleh dari semua kombinasi, sama dengan *k*! kali jumlah kombinasinya.

Jadi $_nP_k = k!\,_nC_k$ atau $_nC_k = \dfrac{_nP_k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Banyaknya kombinasi dari *n* elemen setiap kali diambil *k* elemen merupakan banyaknya pembagian pada suatu himpunan dengan *n* elemen menjadi dua himpunan bagian yang saling asing masing-masing mempunyai *k* elemen dan ($n - k$) elemen.

Pembagian ini dapat diperluas menjadi lebih dari dua himpunan yang saling asing.

Catatan :

Dalam permutasi urutan diperhatikan, yaitu ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA adalah permutasi yang berbeda. Sedangkan dalam kombinasi urutan obyeknya tidak diperhatikan.

Contoh (3.17) :

Berapa banyaknya cara untuk menampung 7 orang dalam 3 kamar hotel, jika tersedia 1 kamar mempunyai 3 tempat tidur sedangkan 2 kamar lainnya mempunyai 2 tempat tidur?

Jawab:

Jumlah seluruh sekat adalah $\begin{pmatrix} 7 \\ 3,2,2 \end{pmatrix} = \dfrac{7!}{3!2!2!} = 210$ cara

Contoh (3.18) :

Jika ada 4 ahli kimia dan 3 ahli fisika, carilah banyaknya cara untuk menyusun panitia terdiri dari 3 orang yang beranggotakan 2 orang ahli kimia dan 1 orang ahli fisika?

Jawab:

Banyaknya cara memilih 2 dari 4 ahli kimia = $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$

Banyaknya cara memilih 1 dari 3 ahli fisika = $\binom{3}{1} = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$

Maka menurut teorema diatas, banyaknya cara memilih 3 orang yang beranggotakan 2 orang ahli kimia dan 1 orang ahli fisika adalah

$$\binom{4}{2}\binom{3}{1}\ (6)(3) = 18 \text{ cara}$$

Contoh (3.19) :

Ada berapa kombinasi dari 4 huruf ABCD, jika diambil 3 huruf ?

Jawab :

Untuk n=4 dan k=3 diperoleh $_4C_3 = \dfrac{4!}{3!(4-3)!} = \dfrac{4!}{3!\ 1!} = 4$

Tabel 3.1. tabel $_4C_3$

Kombinasi	Permutasi					
ABC	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ACD	ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
BCD	BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA adalah kombinasi-kombinasi yang sama (lihat baris pertama)

Catatan:

Karena dalam koefisien binomial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ maka rumus kombinasi menjadi

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rangkuman

1. Setiap pernyataan-peryataan yang digunakan dalam menarik kesimpulan (Konklusi) disebut “premis”. Misalnya : aksioma-aksioma, hipotesa, definisi, rumus-rumus dan pernyataan yang telah dibuktikan sebelumnya.

2. Argumen adalah kumpulan kalimat yang terdiri atas satu atau lebih premis yang memuat bukti-bukti (*evidence*) dan suatu (hanya satu) konklusi.

3. Prinsip Modus Ponnens

   Premis 1 : $p \rightarrow q$ (benar)

   Premis 2 : p (benar)

   ——————————————— &

   Konklusi : q (benar)

   Dinyatakan sebagai $\{(p \rightarrow q) \wedge p\} \rightarrow q$ merupakan tautologi

4. Prinsip Modus Tollens

   Premis 1 : $p \rightarrow q$ (benar)

   Premis 2 : $\overline{q}$ (benar)

   ——————————————— &

   Konklusi : $\overline{p}$ (benar)

   Dinyatakan sebagai $(p \rightarrow q \wedge \overline{q}) \rightarrow \overline{p}$ merupakan tautologi

karena $p \rightarrow q$ ekivalen dengan $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$, kemudian menggunakan prinsip modus ponnens diperoleh :

Premis 1 : $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ (benar)

Premis 2 : $\bar{q}$ (benar)

──────────────────── &

Konklusi : $\bar{p}$ (benar)

Dinyatakan sebagai ($\bar{q}$ ® $\bar{p}$) & $\bar{q}$ } ® $\bar{p}$ merupakan tautologi.

5. Prinsip Silogisma (hukum transitif)

Premis 1 : $p \rightarrow q$ (benar)

Premis 2 : $q \rightarrow r$ (benar)

──────────────────── &

Konklusi : $p \rightarrow r$ (benar)

Dinyatakan sebagai ($p \rightarrow q$) $\wedge$ ($q \rightarrow r$)$\rightarrow$($p \rightarrow r$) merupakan tautologi

6. Silogisma Disjungtif

Premis 1 : $p \vee q$ (benar)

Premis 2 : $\bar{q}$ (benar)

──────────────────── &

Konklusi : p (benar)

Dinyatakan [($p \vee q$) & $\bar{\bar{q}}$] $\rightarrow p$ sebagai tautologi.

7. Prinsip Reductio Ad Absurdum

Digunskan untuk membuktikan bentuk implikasi**“ p ® q”** dengan prosedur pembuktian sebagai berikut:

- Diketahui proposisi **p**
- Dibuktikan pernyataan **q**
- Andaikan pernyataan **q** tidak benar, atau $\bar{q}$ benar.

- Turunkan pernyataan $\overline{q}$, sehingga diperoleh suatu kontradiksi, yaitu **p** $\wedge$ $\overline{p}$ (mustahil, tidak mungkin terjadi karena p $\wedge$ $\overline{p}$ bernilai salah)
- sehingga pengandaian diingkar, yaitu pernyataan **q** adalah benar.
- terbukti bahwa **“ p** ® **q”** benar.

8. Prinsip induksi matematika digunakan untuk membuktikan suatu teorema / rumus / sifat yang bernilai benar.

   Langkah pembuktian :

   1. Basis induksi :Tunjukkan P(1) benar. [pernyataan benar untuk n=1]
   2. Hipotesis induksi : anggapan P(k) benar untuk k [pernyataan benar untuk n=k]
   3. Langkah induksi : Tunjukkan P(k+1) benar. [ditunjukan pernyataan benar untuk n=(k+1)]

9. Kaidah Perkalian**:** Bila suatu operasi dapat dilakukan dalam n_1-cara, dan setiap cara pada operasi ke-2 dapat dilakukan dalam n_2-cara, maka kedua operasi tsb secara bersama-sama dapat dilakukan dalam $(n_1)(n_2)$ -cara.
Aturan perkalian ini dapat diperluas sehingga mencangkup banyak operasi.

10. Kaidah Permutasi dan Kombinasi

- Permutasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari satu kumpulan obyek yang diambil sebagian atau seluruhnya
- Banyaknya permutasi dari *n*-obyek yang berlainan jika diambil *k* sekaligus adalah ${}_nP_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dimana $k \leq n$.
- Banyaknya permutasi dari *n*-obyek yang berbeda adalah $n!$ (dibaca n-faktorial

- Banyaknya permutasi n-obyek berlainan yang disusun melingkar adalah $(n-1)!$
- Banyaknya permutasi dari n-obyek yang berlainan jika n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis ke-2, …….. , n_k berjenis ke-k adalah

$${}_{n}P_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

- Suatu himpunan bagian yang terdiri dari *k* elemen yang diperoleh dari suatu himpunan dengan *n* elemen disebut suatu ***Kombinasi*** dari *n* elemen setiap kali diambil *k* elemen.

- Banyaknya kombinasi dari n-obyek yang berlainan bila diambil sebanyak r-sekaligus adalah $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

- Banyaknya cara menyekat suatu himpunan dari n-obyek dalam r-sel, masing-masing berisi n_1 unsur dalam sel-pertama, n_2 dalam sel ke-2, … , n_r dalam sel ke-r adalah $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$; dengan $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$

Soal-Soal Latihan

1. Periksa apakah argumen berikut ini sah atau tidak sah, menggunakan prinsip apa?.
   a. Jika hari ini hujan, maka saya membawa payung. Ternyata saya tidak membawa payung. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa hari ini tidak hujan.

b. Jika Indonesia negara agraris, maka industri di Indonesia tidak berkembang. Kenyataannya ndustri di Indonesia tidak berkembang. Jadi dapat disimpulkan Indonesia adalah negara agraris.

c. Saya tidak akan gagal dalam ujian Matematika, jika saya belajar. Tidak menonton TV adalah syarat cukup agar saya belajar. Kenyataannya saya gagal dalam ujian Matematika. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa saya menonton TV.

2. Buktikan pernyataan : (a). (a = ganjil) $\rightarrow$ (a^2 = ganjil) ; a = bilangan bulat

   (b) (a^2 = ganjil $\rightarrow$ (a = ganjil) ; a = bilangan bulat

   (c) (a= genap $\rightarrow$ (a^2 = genap) ; a = bilangan bulat

3. Buktikan menggunakan induksi

   a. Rumus Binmomial $(a+b)^k = \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} a^{p-k}.b^k$

   b. $1+2+3+ \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;berlaku untuk setiap n

   c. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}; n = \text{bilangan bulat positif}$

4. Ada berapa cara 3 buku dapat diatur di atas rak ?

5. Dari 4 huruf, dimana ada 2 huruf yang sama, berapa macam cara yang dapat kita bentuk?

6. Ada berapa macam cara yang dapat disusun dari 4 huruf diambil 3 huruf. (misalnya huruf-huruf tersebut A, B, C, dan D).

7. Misalkan kita punya 3 baju, 4 celana dan 2 pasang sepatu. Ada berapa cara kita berangkat kuliah, yaitu pakai satu baju, satu celana dan sepasang sepatu.

8. Tersedia 12 buku, kita ambil 3 buku dan kita urutkan di atas rak buku. Ada berapa macam cara yang dapat kita lakukan ?

9. Ada berapa kata (jajaran huruf-huruf) yang dapat di buat dari kata SETURAN BARU, jika syaratnya tiap kata harus menggunakan lima huruf dan tidak boleh diulang.

10. Tersedia angka 1, 2, 3, 4 dan 5. Berapa banyaknya bilangan yang dapat kita buat dengan empat buah angka yang tersedia itu dengan syarat :

    a. Tidak boleh ada angka yang sama.
    b. Boleh ada angka yang diulang.

11. Ada berapa macam kata yang dapat dibuat dari kata “MAHASISWA” ?

12. Dalam pemberian nomor telepon digunakan 4 angka tanpa angka sama. Angka pertama 0 diperbolehkan. Berapa banyak nomor diperoleh ? Berapa banyak nomor dengan angka 1 dan 2 berurutan ?

13. Ada berapa nomor mobil yang dapat dibuat oleh polisi Yogya, jika paling banyak boleh menggunakan empat angka dan dua huruf.

Kunci Jawaban

3. (a) Akan dibuktikan benarnya rumus $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . a^{n-k} . b^k$

Bukti: (dengan Induksi Matematika)

1. Basis induksi*:* Benar untuk *n* = 1, sebab jika *n* = 1 maka

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} . b^k$$

$$= \binom{1}{0} . a^{1-0} . b^0 + \binom{1}{1} . a^{1-1} . b^1$$

$$= \frac{1!}{0!.(1-0)!}.a.1 + \frac{1!}{1!(1-1)!}.1.b = a + b$$

Jadi $(a+b)^1 = a+b$, bernilai benar.

2. Hipotesis induksi*:*

Anggapan untuk $n = p$; maka:

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^{p-k}.b^k$$

$$= \binom{p}{0}.a^{p-0}.b^0 + \binom{p}{1}.a^{p-1}.b^1 + \binom{p}{2}.a^{p-2}.b^2 + \ldots\ldots + \binom{p}{p}.a^{p-p}.b^p$$

$$= a^p + p.a^{p-1}.b \quad + \tfrac{1}{2}p(p-1).a^{p-2}.b^2 + \ldots\ldots + b^p$$

3. Langkah induksi: ditunjukan u ntuk $n = p + 1$, diperoleh:

$$(a+b)^{p+1} = (a+b)^p\,(a+b)$$

$$= \left(a^p + pa^{p-1}b + \tfrac{1}{2}p(p-1)a^{p-2}b^2 + \ldots\ldots.. + b^p\right).(a+b)$$

$$= \left(a^{p+1} + pa^pb + \tfrac{1}{2}p(p-1)a^{p-1}b^2 + \ldots. + ab^p\right).$$

$$\left(a^pb + pa^{p-1}b^2 + \tfrac{1}{2}p(p-1)a^{p-2}b^3 + \ldots. + b^{p+1}\right)$$

$$= a^{p+1} + (p+1)a^pb + \left(\tfrac{1}{2}p(p-1) + p\right)a^{p-1}b^2 + \ldots\ldots + b^{p+1}$$

$$= \binom{p+1}{0}a^{(p+1)-0}b^0 + \binom{p+1}{1}a^{(p+1)-1}b^1 + \binom{p+1}{2}a^{(p+1)-2}b^2$$

$$+ \ldots\ldots + \binom{p+1}{p+1}a^{(p+1)-(p+1)}b^{p+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k}.a^{(p+1)-k}.b^k.$$

Maka $(a+b)^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} a^{(p+1)-k} b^k.$

Jadi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k$, bernilai benar untuk setiap *n*.

3. (b) Akan dibuktikan rumus $1+2+3\ +\ \ldots\ +\ n\ =\ \dfrac{n(n+1)}{2}$, benar untuk setiap *n*

Bukti : menggunakan induksi matematik

Langkah 1 : Benar untuk *n* = 1, sebab $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$

Langkah 2 : Jika pernyataan benar untuk *n* = *k*, maka juga benar untuk *n* = *k*+1

Untuk *n* = *k* berlaku $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Akan dibuktikan : $1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = \dfrac{(k+1)\ ((k+1)+1)}{2}$

Ruas kanan = $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1)$ $= (1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1)$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\ (k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

= Ruas kiri

Jadi terbukti : $1 + 2 + 3 \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, untuk setiap *n*.

3. (c) Akan ditunjukan : $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; untuk $n \geq 1$

Bukti: dengan Induksi Matematika

Langkah 1: Benar untuk *n* = 1, sebab jika *n* = 1 maka diperoleh

$1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \rightarrow$ bernilai benar

Langkah 2: Jika benar untuk *n* = *k* yaitu:

: $1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$; untuk $k \geq 1$

Maka ditunjukan pernyataan benar untuk n = k+1

Ruas kiri = $1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

$$= \frac{(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

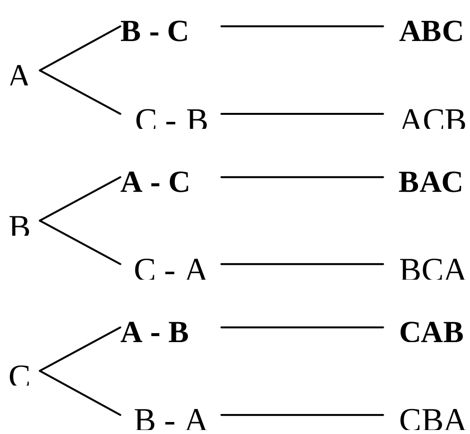
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

= Ruas kanan

Jadi pernyataan $1^2 + 2^2 + \dots\dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; benar untuk $n \geq 1$,

4 Cara 1 : Tulis semua urutan yang dapat terjadi, (misal 3 buku tersebut adalah A, B, dan C) dengan diagram pohon.



Jadi kita dapat mengatur buku itu dengan 6 (enam) cara atau ${}_3P_3$ = 3! = 6

Cara 2 :Seakan-akan kita akan mengisi 3 tempat :

☐	☐	☐
1	2	3

Tempat 1 : dapat diisi buku A atau B atau C.
Jadi ada 3 pilihan.

Tempat 2 : hanya dapat diisi 2 pilihan, sebab sebuah buku sudah di tempatkan di tempat 1.

Tempat 3 : tinggal mengisi satu pilihan saja, sebab yang 2 buku sudah mengisi tempat 1 dan tempat 2.

Jadi banyaknya cara untuk mengisi 3 tempat itu ada (3 x 2 x 1) cara = 6 cara.

5. Misalnya dari 4 huruf tersebut ada 2 huruf yang sama yaitu A, B, C, C.

Permutasi itu adalah :

ABCC	BACC	CABC
ACBC	BCAC	CACB
ACCB	BCCA	CCAB
	CCBA	
	CBCA	
	CBAC	

Jadi banyaknya cara yang dapat dibentuk dari 4 huruf, dengan 2 huruf yang sama adalah $_4P_{1,1,2} = \dfrac{4!}{1!,1!,2!} = 12$

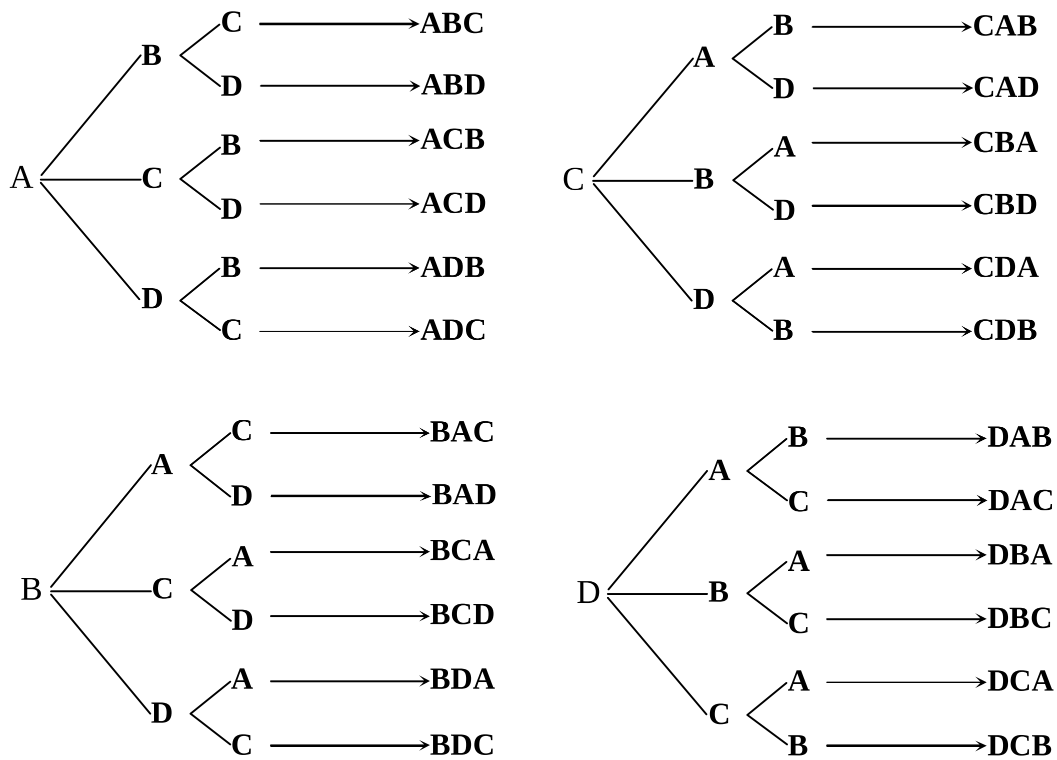
7. Pertama-tama kita pilih baju, yaitu ada 3 pilihan (3 baju). Kemudian pilih celana diantaranya ada 4 yang ada dan akhirnya pilih sepasang sepatu diantaranya 2 pasang.

Jadi kita dapat kuliah dengan :(3 x 4 x 2) cara = 24 cara.

atau

$$= \frac{3!}{2!}\ \frac{4!}{3!}\ \frac{2!}{1!} = 3\ .\ 4\ .\ 2 = 24$$

6. Dibentuk diagram pohon berikut:



Jadi ada : $_4P_3 = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4!}{1!} = 24$ cara .

8. Banyaknya permutasi dari elemen diambil 3 elemen tiap kali adalah :

$$_{12}P_3 = \frac{12\,!}{(12\ -\ 3)!} = \frac{12\,!}{9!}$$

9. Tersedia huruf-huruf SETURAN BARU yaitu ada 8 huruf tidak ada yang sama. Akan berbentuk kata dengan 5 huruf. Jadi banyaknya kata yang dapat dibentuk adalah :

$$_8P_{51} = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{8, 7, 6, 5, 4}{3, 2, 1} = 6720 \text{ kata.}$$

10. a. Seakan-akan akan mengisi empat tempat (bilangan dengan empat angka)

Tempat pertama : diisi 5 cara(karena tersedia 5 angka)

Tempat ke dua : diisi 4 cara, sebab sudah ada satu angka yang sudah mengisi tempat pertama.

Tempat ke tiga : diisi 3 cara, sebab yang 2 buah telah mengisi tempat pertama dan ke dua.

Tempat ke empat : tinggal mengisi 2 angka yang dapat dipilih.

Jadi banyak bilangan yang dapat dibuat =(5 x 4 x 3 x 2) = 120 buah.

Atau $_5P_4 = \dfrac{5!}{(5-4)!} = \dfrac{5!}{1!} = 120$

b Karena angka-angkanya boleh diulang, maka tempat pertama, ke dua, ke tiga, maupun ke empat dapat diisi dengan 5 angka.

5 x 5 x 5 x 5 = 625 buah.

11. Misalkan

$\square \quad \square \quad \square \quad \square$

Kata M, A, H, A, S, I, S, W, A, ini ada 9 huruf, yang terdiri dari 3 huruf A, 2 huruf S, 1 huruf M, 1 huruf H, 1 huruf I dan 1 huruf W.

Jadi banyaknya kata yang dapat kita buata ada :

$$\frac{9!}{3!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1!} = \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1\ \ 2.1\ \ 1\ 1\ 1\ 1} = 30240 \text{ cara.}$$

12. Banyaknya nomor = $_{10}P_4 = \dfrac{10!}{6!} = 5040$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & ? & ? \\ ? & 1 & 2 & ? \\ ? & ? & 1 & 2 \end{matrix}\right\} \text{hanya ada 3 kemungkinan angka 1 dan 2 berurutan}$$

(berdekatan).

Perhatihan !

hanya ada 2 tempat kosong. Dan diisi angka-angka 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (ada 8 angka).

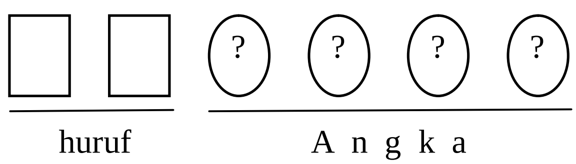
Banyaknya cara untuk mengisi 2 tempat kosong adalah :

$$_8P_2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = 8.7 = 56$$

Jadi banyaknya nomor dengan angka 1 dan 2 berurutan adalah :

$$3\ _8P_2 = 3.56 = 168$$

13. Angka 0, 1, 2, ….., 9, ada 10 dan Huruf A, B, C, ….., Z ada 26



Untuk angka pertama, 0 tidak digunakan.

Untuk membuat nomor polisi dengan :

1 angka dan 1 huruf ada = 9 x 26	=	234
1 angka dan 2 huruf ada = 9 x 26 x 26	=	6084
2 angka dan 1 huruf ada = 9 x 10 x 26	=	2340
2 angka dan 2 huruf ada = 9 x 10 x 26 x 26	=	60840
3 angka dan 1 huruf ada = 9 x 10 x 10 x 26	=	234000
3 angka dan 2 huruf ada = 9 x 10 x 10 x 26 x 26	=	608400
4 angka dan 1 huruf ada = 9 x 10 x 10 x 10 x 26	=	234000
4 angka dan 2 huruf ada = 9 x 10 x 10 x 10 x 26 x 26	=	6084000
Jumlah		7019298

Jadi polisi Yogya dapat membuat nomor polisi sebanyak 7019298 dengan paling banyak empat angka dan 2 huruf.